

Неравенства с фиксированными величинами

04 июля

Неравенство Коши. Для положительных x_1, x_2, \dots, x_n выполнены неравенства:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

Обычно в задачах фиксируют значение одного из этих четырёх выражений.

Однородность. Если выражение однородно, то есть не меняется при замене $x_i \mapsto \lambda x_i$, то можно подобрать λ такое, чтобы сумма (произведение, сумма квадратов, ...) переменных равнялась 1. Наоборот, если некая величина зафиксирована, можно избавиться от этого условия, сводя неравенство к однородному.

1. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Докажите, что

$$a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-c^2)(1-a^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \geq 2\sqrt{abc}.$$

2. Для положительных a, b, c , таких что $a + b + c = 3$, докажите неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6.$$

3. (а) Для положительных a, b, c , таких что $a + b + c = 1$, докажите неравенство

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 1.$$

(б) Докажите, что если $x, y, z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, то $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq \sqrt{3}$.

4. Для положительных a и b , удовлетворяющих условию $ab = 1$, докажите неравенство

$$\frac{a}{a^2 + 3} + \frac{b}{b^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

5. Положительные x, y, z таковы, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Докажите, что

$$\frac{1}{xy + z} + \frac{1}{yz + x} + \frac{1}{zx + y} \geq \frac{3}{2}.$$

6. Сумма четвертых степеней вещественных чисел a, b и c равна $\frac{3}{2}$. Докажите неравенство

$$a\sqrt{b^2 + c^2} + b\sqrt{a^2 + c^2} + c\sqrt{a^2 + b^2} \leq 3.$$

7. Известно, что $a, b, c > 0$ и $a + b + c = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{3a^2 + b^2 + 2ca} + \frac{b}{3b^2 + c^2 + 2ab} + \frac{c}{3c^2 + a^2 + 2bc} \leq \frac{3}{2}.$$

8. Для положительных чисел a, b, c выполнено равенство $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + bc} + \sqrt{b + ca} + \sqrt{c + ab} \geq \sqrt{abc} + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

9. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{1}{a + bc} + \frac{1}{b + ca} + \frac{1}{c + ab} \geq \frac{7}{1 + abc}.$$